Wintersemester 2005/06
Reimund Albers

Arithmetik als Prozess

8. Übung
Teilerdiagramme, Primzahlen, kleiner Satz von Fermat

Präsenzübungen (für 12.12./13.12./14.12.)

1. Berechnen Sie $x \equiv 3^{78} \bmod 79,\ 1 \le x \le 78$ auf möglichst geschickte Weise mit einem einfachen Rechner mit max. 8 stelliger Anzeige.

2. Zur Logik, die bei der Primzahlsuche mit dem kleinen Satz von Fermat verwendet wird.
   p ist Primzahl $\Rightarrow \forall a \in \{1,2,3,...,p-1\}$ gilt: $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$
   a. Bilden Sie die Kontraposition.
   b. Sie wissen, dass p Primzahl ist. Sie berechnen x in $x \equiv 2^{p-1} \bmod p$ mit $1 \le x \le p-1$. Was wissen Sie über x?
   c. Sie berechnen x in $x \equiv 2^{p-1} \bmod p$ mit $1 \le x \le p-1$ und erhalten $x = 1$. Was wissen Sie dann über p?
   d. Sie berechnen x in $x \equiv 2^{p-1} \bmod p$ mit $1 \le x \le p-1$ und erhalten $x = 5$. Was wissen Sie dann über p?

Hausübungen (Abgabe: Do, 15.12.)

3. Der Ausdruck $\left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^2$ ergibt korrekt umgeformt (es sind mehrere richtig):
   a) $\prod_{i^2=1}^{n^2} i$ b) $\prod_{k=1}^{n} k^2$ c) $\prod_{n=1}^{n} n^2$ d) $\prod_{k=1}^{n} i^2$ e) $\prod_{i=1}^{n^2} i$ f) $\prod_{b=1}^{n} b^2$
   Erläutern Sie bei den falschen Antworten die Fehler.

4. Wir betrachten die Menge $D = \{1\} \cup \{3,6,9,12,...\}$.
   In D definieren wir die Teilbarkeitsrelation $|_D$ durch :
   $\forall a,b \in D$ gilt: $a\,|_D\, b \Leftrightarrow \exists q \in D$ mit $b = qa$.
   Wie in $\mathbb{N}$ definieren wir in D: Eine Zahl $p \in D$ heißt Primzahl, wenn sie genau zwei Teiler hat.
   a. 3 ist die kleinste Primzahl in D. Begründen Sie, dass auch 6 eine Primzahl in D ist.
   b. Zählen Sie alle Primzahlen in D bis 48 auf.
   c. Beweisen Sie: $d \in D$ ist in $\mathbb{N}$ durch 9 teilbar $\Leftrightarrow$ d ist in D keine Primzahl.
   d. In D ist die Primfaktorzerlegung nicht eindeutig. Zeigen Sie das am Beispiel 108, indem Sie 108 in zwei verschiedene PFZ aufspalten.

5. Schreiben Sie zu den angegebenen Zahlen die Primfaktorzerlegung und die Teilermenge auf und zeichnen Sie das Teiler (=Hasse)-Diagramm.
   a. 16 b. 45 c. 56 d. 100

6. (Primfaktorzerlegung)
   a. Berechnen Sie $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ und $5!$ und geben Sie für beide die PFZ an. Begründen Sie über die PFZ, warum das Ergebnis von $5!$ mit einer Null endet.
   b. Wenn man $a = 2^{24}\cdot 3^{22}\cdot 5^{20}\cdot 7^{18}\cdot 11^{16}\cdot 13^{14}$ berechnet, wie viele Nullen hat das Ergebnis am Ende?

7. Berechnen Sie $x \equiv a^{p-1} \bmod p$ mit $1 \le x \le p-1$ für $p = 91$ und $a = 3$, $a = 4$ und $a = 9$. Was folgt daraus für die Zahl 91?

8. Sonderaufgabe (War Aufgabe für die 8. Klasse in einem Mathematikwettbewerb)
   Es seien p und q = p+2 zwei Primzahlen (so genannte Primzahlzwillinge) und $p \ge 5$.
   Dann ist $p\cdot q+1$ eine durch 36 teilbare Zahl.
   Beispiel: $11\cdot 13 + 1 = 144 = 4\cdot 36$